Covid 19 in de klas

Ad Meskens

AP Hogeschool

Departement OT (lerarenopleiding)

Wees gerust, we wensen je geen Coronavirus in de klas. Wel willen we hier gebruikmaken van de actualiteit om exponentiële en gelijkaardige fenomenen in de kijker te plaatsen. Tegelijkertijd kunnen we op die manier ook aan een aantal transversale eindtermen tegemoetkomen. Samenwerking met collega's biologie of natuurwetenschappen is een pluspunt.

Fenomenen van exponentiële groei zijn een onderwerp dat in de derde graad wordt behandeld. Toch kan het onderwerp ook in de lagere graden behandeld worden door met concrete getallen te werken. We zullen hier die laatste weg volgen. Hoewel we in deze tekst de resultaten berekenen tot de tiende dag, is dit niet noodzakelijk: men kan zich tot enkele dagen beperken.

In wat volgt geven we zeer vereenvoudigde modellen die niet sporen met modellen die virologen gebruiken. In de modellen in dit artikel zijn er geen dragers (*vectoren* in biologisch jargon) die ziektekiemen overbrengen. Evenmin wordt rekening gehouden met atmosferische omstandigheden die de snelheid van overdracht kunnen beïnvloeden. Deze eenvoudige modellen geven aan leerlingen wel een begrip van hoe snel een ziekte om zich heen kan grijpen en wat het gevolg is van de tijdsduur waarin iemand besmettelijk is. Het kan leerlingen ook een inzicht geven in en begrip doen opbrengen voor de soms draconische maatregelen die overheden treffen. En het is een mooie toepassing van wiskundig modelleren en van het maatschappelijk nut van wiskunde.

In de epidemiologie maakt men gebruik van een zogenaamd *basaal reproductiegetal* R_0. Dit getal geeft aan hoeveel mensen besmet worden door een besmettelijk individu in afwezigheid van voorzorgsmaatregelen. Dit getal verschilt enorm naargelang de ziektekiem. Voor ebola is $R_0 \approx 2$, voor de Spaanse griep lag R_0 tussen 2 en 2,5, voor mazelen ligt R_0 tussen 12 en 18.

We spreken hier steeds over groepen waar nog geen immuniteit aanwezig is. Er bestaat hiervan een historisch voorbeeld. De komst van Hernán Cortés (en in zijn zog de andere conquistadores) stelde de inheemse bevolking bloot aan ziektekiemen die in Amerika onbekend waren. Het resultaat was dat ziekten die in Europa, wegens de zogenaamde kudde-immuniteit, een beperkte impact hadden, in Amerika hele bevolkingsgroepen, onbeschermd door immuniteit, decimeerden.

Exponentiële groei

We veronderstellen dat we te maken hebben met een gesloten systemen, bijvoorbeeld een hotel in Tenerife of cruiseschepen.

Beschouw een cruiseschip A_1 met 500 aanwezigen en een cruiseschip, A_2, met 1000 aanwezigen.

Er is een nieuw virus, het *stemmavirus*, opgedoken dat de ronde doet. Het is waarschijnlijk ontstaan op het eiland *Blefuscu* dat door beide cruiseschepen is aangedaan.

Veronderstel verder dat als iemand besmet is met het stemmavirus hij slechts één dag besmettelijk is. Hij besmet twee andere nog niet besmette personen. Hij blijft echter drager van het virus en hij is ziek gedurende één maand.

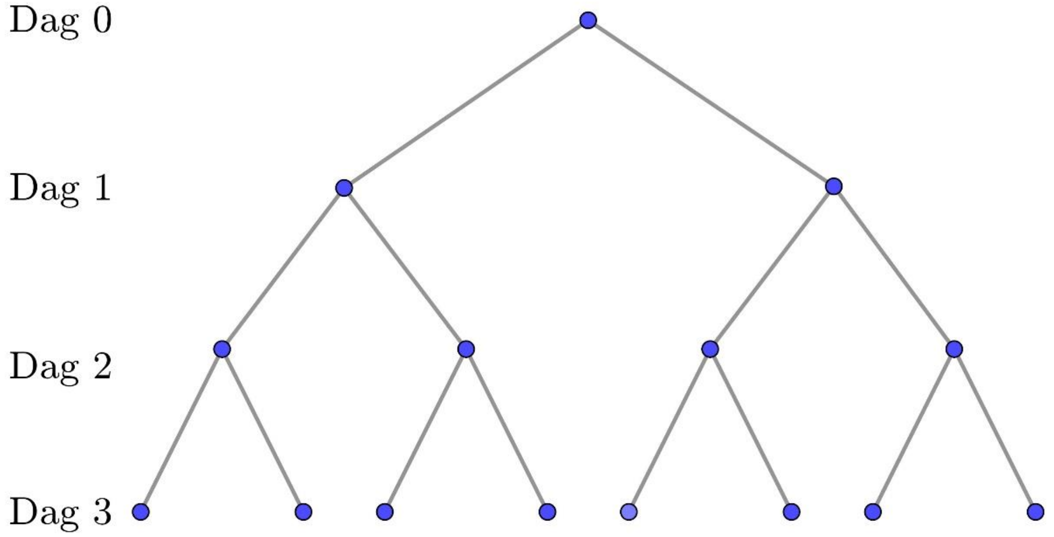
Aan boord van elk van de cruiseschepen is welgeteld één besmet iemand aan boord gestapt. Bepaal hoeveel zieken er na verloop van enkele dagen zijn. Wat is het verschil, uitgedrukt in dagen, tussen de dag waarop op het grootste cruiseschip alle aanwezigen ziek zijn en de dag waarop dit op het kleinste schip is gebeurd?

We kunnen gemakkelijk onderstaande tabel opstellen. Dat kan zowel manueel als met Excel.

Dag	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Nieuwe besmettingen	0	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
Zieken	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047

We merken dat na 8 dagen alle aanwezigen op het kleine cruiseschip besmet zijn, een dag later (!) is dat ook het geval voor het grote cruiseschip.

We kunnen deze groei ook grafisch weergeven. Het geeft de gekende boomstructuur.



Figuur 1

Als we R_0 laten variëren, dan merken we dat er zeer grote verschillen optreden. Een $R_0 = 3$ in plaats van $R_0 = 2$ laat reeds enorme verschillen zien!

Dag	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Nieuwe besmettingen	0	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
Zieken	1	4	13	40	121	364	1093	3280	9841	29524	88573

Het is duidelijk dat (in eerste instantie) het aantal zieken gelijk is aan de eerste *n* termen van een meetkundige rij, $S_n = \sum_0^n R_0^i = \frac{1-R_0^{n+1}}{1-R_0}$

Zelfs met langere incubatietijden dan de hier genomen 1 dag is het duidelijk dat de invloed van R_0 enorm is. Laat de mazelen (R_0 tussen 12 en 18) maar eens los op een onbeschermde bevolking!

Met herhaalde besmettingen

In een tweede benadering gaan we er van uit dat iemand die besmet is, besmettelijk blijft gedurende de hele ziekte, hier dus een maand. Dit wordt wat moeilijker. We behouden de factor 2. Iemand die besmet is besmet dus *elke* dag twee andere personen.

De tabel wordt nu:

Dag	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Primaire besmettingen	0	2	4	12	36	108	324	972	2916	8748	26244
Secundaire besmettingen			2	4	12	36	108	324	972	2916	8748
Tertiaire besmettingen				2	4	12	36	108	324	972	2916
4de graad					2	4	12	36	108	324	972
5de graad						2	4	12	36	108	324
6de graad							2	4	12	36	108
7de graad								2	4	12	36
8ste graad									2	4	12
9de graad										2	4
10de graad											2
Nieuwe zieken	0	2	6	18	54	162	486	1458	4374	13122	39366
Totaal aantal zieken	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Merk op dat het totaal aantal zieken een meetkundige rij vormt, $T_i = 3^i$, waarin T_i voor het totaal aantal zieken op dag *i* staat. De tabel behoeft wat uitleg.

Op dag 0 is er één iemand, P_0, ziek.

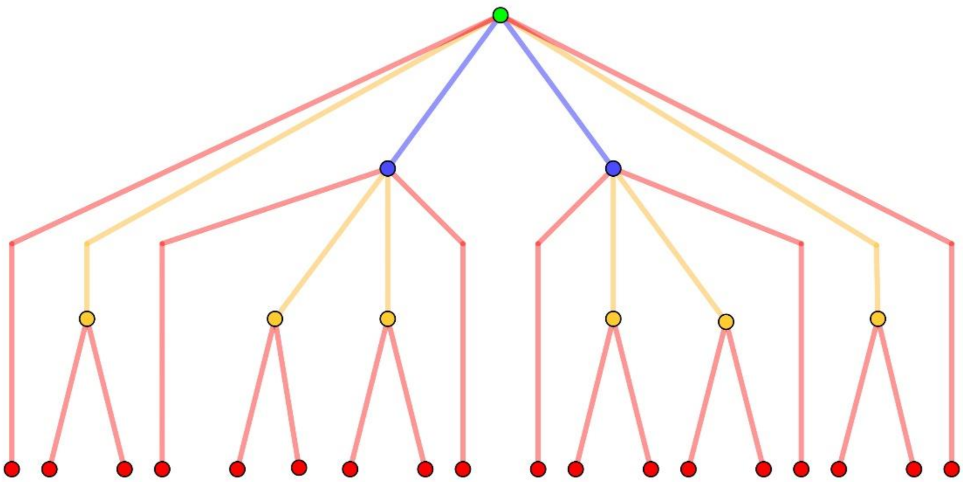
Op dag 1 steekt hij twee andere personen, $P_{1,1}$ en $P_{1,2}$, aan. Op dat moment zijn er dus drie zieken.

Op dag 2 steekt P_0 opnieuw twee personen aan. Dit is de secundaire besmetting. Ook $P_{1,1}$ en $P_{1,2}$ steken elk twee personen aan, dit zijn de vier primaire besmettingen op dag 2. In totaal zijn er nu dus 6 nieuwe zieken.

Op dag 3 steekt P_0 opnieuw twee personen aan. Dit is de tertiaire besmetting. Ook $P_{1,1}$ en $P_{1,2}$ steken elk twee personen aan, dit zijn de vier secundaire besmettingen op dag 2. Elk van de zes zieken van dag 2 steken nu twee personen aan, dit zijn de primaire besmettingen van dag 3. In totaal zijn er nu dus 2 + 4 + 12 =18 nieuwe zieken.

Op dag 4 herhaalt het hele scenario zich, maar nu zullen er 18 · 2= 36 primaire besmettingen zijn.

Ook hier kunnen we een figuur maken, die nu reeds heel wat ingewikkelder is:



Figuur 2

Het veranderen van de factor van 2 naar 3 levert ook hier spectaculaire veranderingen:

Dag	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Primaire besmettingen	0	3	9	36	144	576	2304	9216	36864	147456	589824
Secundaire besmettingen			3	9	36	144	576	2304	9216	36864	147456
Tertiaire besmettingen				3	9	36	144	576	2304	9216	36864
4de graad					3	9	36	144	576	2304	9216
5de graad						3	9	36	144	576	2304
6de graad							3	9	36	144	576
7de graad								3	9	36	144
8ste graad									3	9	36
9de graad										3	9
10de graad											3
Nieuwe zieken	0	3	12	48	192	768	3072	12288	49152	196608	786432
Totaal aantal zieken	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576

Het totaal aantal zieken vormt opnieuw een meetkundige rij , $T_n = 4^n$. Na tien dagen zijn er in plaats van nagenoeg 60000 zieken bij een factor 2, meer dan een miljoen zieken bij een factor 3!

We vinden een wetmatigheid: als er elke dag *a* personen door een besmet persoon worden aangestoken, dan is het totaal aantal besmette personen op dag *i* gelijk aan $T_i = a^i$. Deze wetmatigheid is uiteraard niet toevallig. In bovenstaande tabellen hebben we naar primaire, secundaire, tertiaire … besmettingen gekeken. Dat hoeft uiteraard niet als we alleen geïnteresseerd zijn in het totaal aantal zieken en dus in het aantal nieuwe zieken dat er per dag bij komt. Als er op dag *i* T_i personen besmet zijn, dan zullen er op dag *i* +1 $N_{i+1} = a \cdot T_i$ nieuwe patiënten zijn. Dat brengt het totaal aantal patiënten op $T_{i+1} = T_i + N_{i+1} = T_i + a \cdot T_i = (1 + a)\, T_i$.

Dit vormt de basis voor een bewijs per inductie.

In lagere jaren kan men zich beperken tot het berekenen van het aantal patiënten tot dag 3 of 4. Hieruit kan de wetmatigheid aannemelijk worden gemaakt en kan men verder gaan met de procedures voor exponentiële groei. In hogere jaren kan men gebruik maken van Excel om een tabel, zoals hier, op te stellen. In sommige jaren kan bovendien het bewijs per inductie worden gegeven.

Quarantaine

Het woord *quarantaine* is afkomstig van het Italiaanse woord voor *quarantina* of vertaald veertig. In de veertiende eeuw, ten tijde van de pestepidemie, moest de bemanning van in Venetië aankomende schepen veertig dagen in afzondering gaan. In het begin was dit op nabijgelegen eilanden en was er geen strikte scheiding tussen bemanningen van verschillende schepen die op verschillende momenten aankwamen. Later werd de quarantaine verscherpt zodat bemanningen van elkaar gescheiden bleven. Slechts als duidelijk was dat de bemanning vrij van pest was, mocht het schip aanmeren. Het bleek een effectieve maatregel te zijn om de pest in te dijken.

We kunnen met onze tabellen ook nagaan wat het effect is van quarantaine. Veronderstel dat we patiënt 0, P_0, op dag twee kunnen identificeren en in quarantaine plaatsen.

Dan wordt onze tabel:

Dag	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Primaire besmettingen	0	2	4	8	24	72	216	648	1944	5832	17496
Secundaire besmettingen			0	4	8	24	72	216	648	1944	5832
Tertiaire besmettingen				0	4	8	24	72	216	648	1944
4de graad					0	4	8	24	72	216	648
5de graad						0	4	8	24	72	216
6de graad							0	4	8	24	72
7de graad								0	4	8	24
8ste graad									0	4	8
9de graad										0	4
10de graad											0
Nieuwe zieken	0	2	4	12	36	108	324	972	2916	8748	26244
Totaal aantal zieken	1	3	7	19	55	163	487	1459	4375	13123	39367

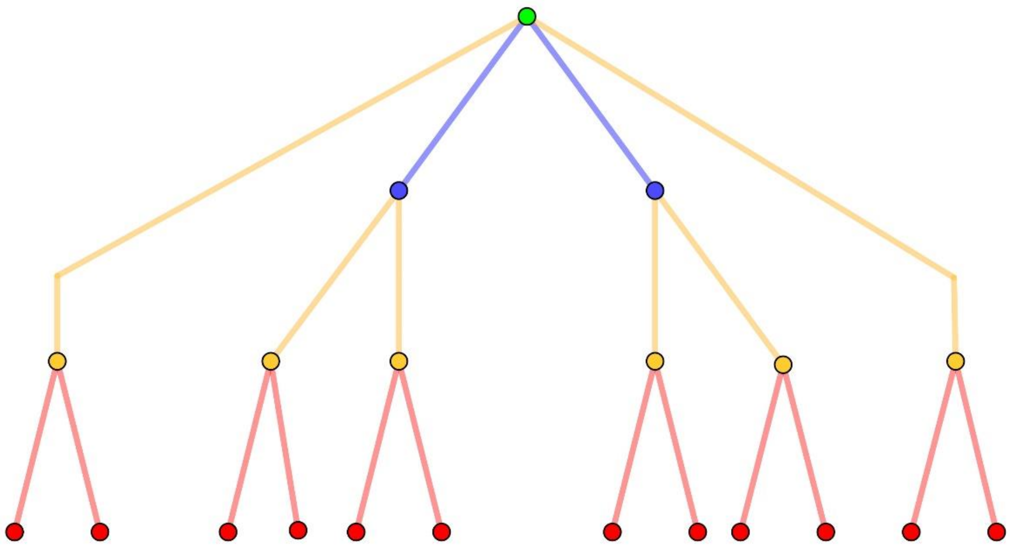
Het isoleren van één persoon, vroeg in de ontwikkeling resulteert in een vermindering met één derde!

Veronderstel dat we op dag 2 ook $P_{1,1}$ en $P_{1,2}$ kunnen identificeren en in isolatie plaatsen, dan ziet het plaatje er als volgt uit:

Dag	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Primaire besmettingen	0	2	4	8	16	48	144	432	1296	3888	11664
Secundaire besmettingen			0	0	8	16	48	144	432	1296	3888
Tertiaire besmettingen				0	0	8	16	48	144	432	1296
4de graad					0	0	8	16	48	144	432
5de graad						0	0	8	16	48	144
6de graad							0	0	8	16	48
7de graad								0	0	8	16
8ste graad									0	0	8
9de graad										0	0
10de graad											0
Nieuwe zieken	0	2	4	8	24	72	216	648	1944	5832	17496
Totaal aantal zieken	1	3	7	15	39	111	327	975	2919	8751	26247

Dit is pas spectaculair! Het aantal zieken op dag 10 is meer dan gehalveerd!

De bijhorende figuur is hier:



Figuur 3 Op dag 2 werden de patiënten P_0, en $P_{1,1}$ en $P_{1,2}$ in quarantaine geplaatst.

Dit toont aan dat bij het uitbreken van een nieuwe ziekte quarantaine van patiënten in een zo vroeg mogelijk stadium een enorm effect heeft op de verspreiding van de ziekte.

Tot slot

De Spaanse griep (H1N1 influenza) had in 1918 een mortaliteit van ongeveer 2,5%. Schattingen van het dodental lopen uiteen van 17 miljoen tot 50 miljoen wereldwijd. Men schatte de wereldbevolking op 1,8 miljard. Alleen de Zwarte Dood (veroorzaakt door de bacterie *Yersinia pestis*) overtreft de Spaanse griep wat slachtoffers betreft.

Op het moment van het schrijven (5 maart 2020) waren er 100.440 gevallen van besmettingen met het coronavirus bekend (https://www.tijd.be/dossiers/coronavirus/98-698-besmettingen-het-coronavirus-in-kaart/10210378.html) en waren er 3.408 doden als gevolg hiervan te betreuren. Men hoeft geen rekenwonder te zijn om uit het voorbeeld van de Spaanse griep de verschrikkelijke gevolgen af te leiden indien het Coronavirus een onbeschermde wereldbevolking van 7,5 miljard mensen ongestoord treft.

Bibliografie

P. de Groen, Modellen voor bevolkingsgroei: I Discrete modellen, Wiskunde en Onderwijs 58 (1989), 97-108.

P. de Groen, Modellen voor bevolkingsgroei: II Continue modellen, Wiskunde en Onderwijs 60 (1989), 449-464.

Tara C. Smith, *The Unforgiving Math that stops Epidemics*, Quanta Magazine, November 2017, gepubliceerd op de website van Scientific American https://www.scientificamerican.com/article/the-unforgiving-math-that-stops-epidemics/